

Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Processo de Nascimento (Puro)

$$\mathcal{S} = \bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\} = \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$$

Cadeia de saltos: $(Y_n)_{n \geq 0}$ tq $P_{x, x+1} = 1$, $x \in \mathbb{N}$

Tempo de permanência em $x \sim \text{Exp}(q_x)$, onde

$0 \leq q_x < \infty$, $x \in \mathbb{N}$, são as *taxas de nascimento*

Dado que $X_0 = x \in \mathbb{N}$, então $Y_n = n + x$, $n \geq 0$, e os tempos de salto T_1, T_1, \dots são exponenciais independentes, $T_n \sim \text{Exp}(q_{n+x})$.

Exemplos. 1) O $\text{PP}(\lambda)$ é um PN com $q_x \equiv \lambda$.

2) *Processo de nascimento simples* ou *linear*.

Em certa população, os indivíduos se reproduzem, independentemente cada um dos demais, à taxa $\lambda > 0$ (isto é, cada indivíduo produz descendentes em tempos $\text{Exp}(\lambda)$, independentemente dos demais).

PN simples (cont)

Pela falta de memória da distribuição exponencial, a população, quando está com tamanho n , cresce para $n + 1$ num tempo que é o mínimo de n exponenciais independentes, cada uma com taxa λ , logo com distribuição $\text{Exp}(n\lambda)$. Então $(X_t) \sim \text{PN}(q_x = x\lambda, x \in \mathbb{N})$.

Vamos calcular $\mu(t) := \mathbb{E}(X_t)$ sob \mathbb{P}_1 .

Seja T o tempo do nascimento do 1o descendente do 1o indivíduo da população (aquele presente na população no tempo 0): $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Temos que

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \mathbb{E}_1(\overbrace{X_t}^1, T > t) + \mathbb{E}_1(X_t, T \leq t) \\ &= \mathbb{P}_1(T > t) + \int_0^t ds \lambda e^{-\lambda s} \underbrace{\mathbb{E}_1(X_t | T = s)}_{\mathbb{E}_2(X_{t-s}) \stackrel{*}{=} 2 \mathbb{E}_1(X_{t-s})} \\ &= e^{-\lambda t} + 2 \int_0^t ds \lambda e^{-\lambda s} \mu(t-s)\end{aligned}\tag{1}$$

*Sob \mathbb{P}_2 , $(X_t) =$ soma de 2 PNs independentes sob \mathbb{P}_1 .

PN simples (cont)

Multiplicando por $e^{\lambda t}$ os 2 lados de (1):

$$\nu(t) := \mu(t)e^{\lambda t} = 1 + 2\lambda \int_0^t ds \overbrace{e^{\lambda(t-s)} \mu(t-s)}^{\nu(t-s)} = 1 + 2\lambda \int_0^t ds \nu(s)$$

Diferenciando: $\nu'(t) = 2\lambda\nu(t) \Rightarrow \nu(t) = \text{const } e^{2\lambda t}$.

$$\nu(0) = \mu(0) = 1 = \text{const}$$

Logo, $\nu(t) = e^{2\lambda t}$, e segue que $\mu(t) = e^{-\lambda t}\nu(t) = e^{\lambda t}$.

Explosão

Seja $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ e $\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Teorema 1

Seja (X_t) um PN com taxas de nascimento $(q_x)_{x \in \mathbb{N}}$; $X_0 = 0$.

(i) Se $\sum_{x \in \mathbb{N}} \frac{1}{q_x} < \infty$, então $\mathbb{P}(\zeta < \infty) = 1$.

(ii) Se $\sum_{x \in \mathbb{N}} \frac{1}{q_x} = \infty$, então $\mathbb{P}(\zeta = \infty) = 1$.

Dem. Basta aplicar o Teorema 4 do Álbum 13.



Propriedade de Markov

Pode ser estabelecida para os PNs de forma similar ao caso do PP.

Caracterizações equivalentes do PN

Teorema 2

Seja (X_t) um processo não decrescente, contínuo à direita em $\tilde{\mathbb{N}}$.
Sejam $0 \leq q_x < \infty$, $x \in \mathbb{N}$. São equivalentes

- a) (X_t) é um PN com taxas (q_x) (como definido acima).
b) Dado que $X_t = x$, $(X_{t+s})_{s \geq 0}$ é indep de $(X_r)_{r < t}$, e, unif/e em t :

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0 \mid X_t = x) = 1 - q_x h + o(h),$$

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1 \mid X_t = x) = q_x h + o(h).$$

- c) (X_t) é Markoviano, temporalmente homogêneo, e

$$\mathbb{P}_x(X_t = y) = P_{xy}(t), \quad t \geq 0,$$

onde $\{P_{xy}(t); x, y \in \mathbb{N}; t \geq 0\}$ é a (única) solução de

$$(*) \begin{cases} P'_{x0}(t) = -q_0 P_{x0}(t), & P_{x0}(0) = \delta_{x0}; \\ P'_{xy}(t) = -q_y P_{xy}(t) + q_{y-1} P_{x,y-1}(t), & P_{xy}(0) = \delta_{xy}, \quad y \geq 1. \end{cases}$$

Dem. Similar à do caso do PP.

Probabilidades de transição no tempo t

(*) pode ser resolvido recursivamente, similar/e ao caso do PP.

Vamos considerar o caso em que $x = 0$ e q_x 's positivos e distintos.

$$P_{00}(t) = e^{-q_0 t}; P_{01}'(t) = -q_1 P_{01}(t) + q_0 P_{00}(t), \text{ e logo}$$

$$(P_{01}(t)e^{q_1 t})' = q_0 e^{(q_1 - q_0)t} \Rightarrow P_{01}(t) = e^{-q_1 t} \int_0^t q_0 e^{(q_1 - q_0)s} ds.$$

Finalmente,

$$P_{01}(t) = \frac{q_0}{q_1 - q_0} e^{-q_1 t} (e^{(q_1 - q_0)t} - 1) = \frac{q_0}{q_1 - q_0} (e^{-q_0 t} - e^{-q_1 t})$$

Probabilidades de transição (cont)

Similarmente, de $P'_{02}(t) = -q_2 P_{02}(t) + q_1 P_{01}(t)$ segue:

$$\begin{aligned} P_{02}(t) e^{q_2 t} &= \frac{q_1 q_0}{q_1 - q_0} \int_0^t (e^{(q_2 - q_0)s} - e^{(q_2 - q_1)s}) ds \\ &= \frac{q_1 q_0}{q_1 - q_0} \left[\frac{1}{q_2 - q_0} (e^{(q_2 - q_0)t} - 1) - \frac{1}{q_2 - q_1} (e^{(q_2 - q_1)t} - 1) \right], \end{aligned}$$

e logo

$$P_{02}(t) = \frac{q_1 q_0}{q_1 - q_0} \left[\frac{1}{q_2 - q_0} (e^{-q_0 t} - e^{-q_2 t}) - \frac{1}{q_2 - q_1} (e^{-q_1 t} - e^{-q_2 t}) \right],$$

e assim por diante.